PH Schwäbisch Gmünd
University of Education




Rechnen lernen alle
-
auf das „WIE“ kommt es an

Prof. Dr. Klaus-Peter Eichler

PH Schwäbisch Gmünd | NORD Universitet Bodø (Norge)

www.integrative-lerntherapie.de

(Berlin und Schwäbisch Gmünd)

Überblick

1 Lernen von Mathematik

2 Die Rolle der Anschauung beim Lernen

3 Veranschaulichungen – Hoffnung und Realität

4 Wie wir rechnen und was Kinder lernen

5 Perspektiven

1 Lernen von Mathematik …

… ist

- ein Prozess aktiver eigener Sinnkonstruktion,
- ein sozialer Prozess aus der Sache heraus,
- ein Prozess, der eine gezielte Anleitung benötigt.

1 Lernen von Mathematik …

… ist

- ein Prozess aktiver eigener Sinnkonstruktion,
- ein sozialer Prozess aus der Sache heraus,
- ein Prozess, der eine gezielte Anleitung benötigt.

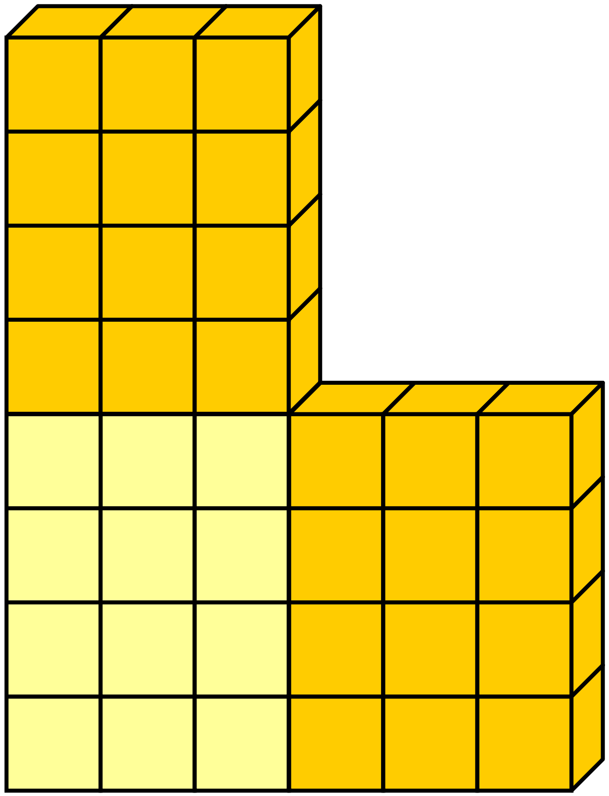
Verstehen ermöglichen - einsehen

$$25 \cdot 36$$

$$100 \cdot \quad 9 = 900$$

- Ist es die Lehrerin, die hier einen „Trick“ zeigt, ihn ERLAUBT?
  oder
- Kann das Kind *sehen* warum das stimmt?

„Halb so hoch ist doppelt so breit."



3 • 86 • 4

1 Lernen von Mathematik …

… ist

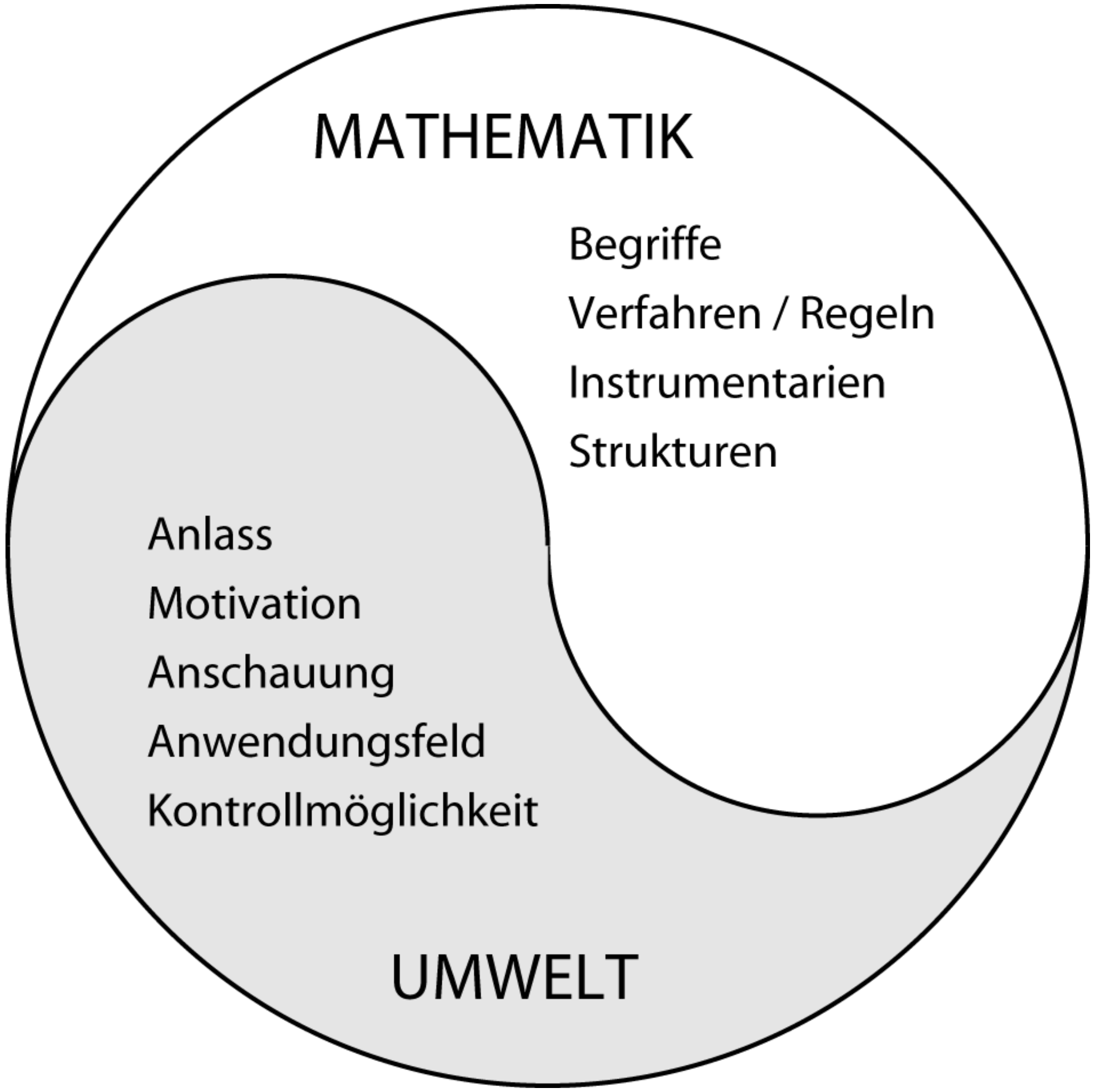
- ein Prozess aktiver eigener Sinnkonstruktion,
- ein sozialer Prozess aus der Sache heraus,
- ein Prozess, der eine gezielte Anleitung benötigt

1 Lernen von Mathematik …

… ist

- ein Prozess aktiver eigener Sinnkonstruktion,
- ein sozialer Prozess aus der Sache heraus,
- ein Prozess, der eine gezielte Anleitung benötigt

Die Welt, die Mathematik und ein Kind mittendrin



Sachverhalte aus Ausgangspunkt

Wer baut aus 20 Blatt Papier und Leim die stabilste Brücke

PH Schwäbisch Gmünd

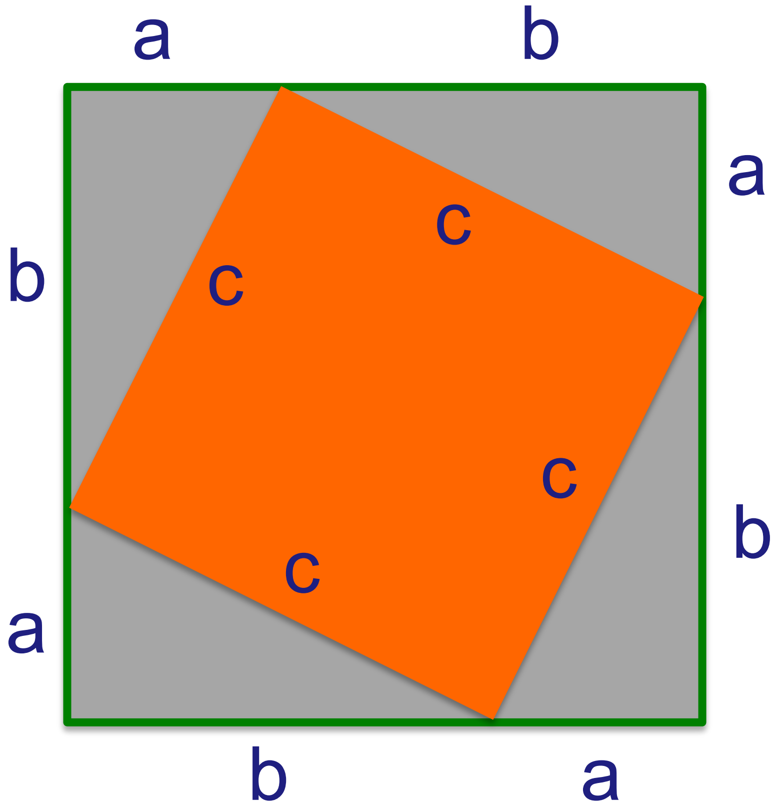
2 Die Rolle der Anschauung beim Lernen

mehr als nur ein Kunstwerk

Produkte künstlerischen Schaffens auch „mit den Augen der Mathematik“ sehen und dabei staunen ...

G. Brendel - Pythagorasspirale

lassen Sie uns den Beweis *sehen*



$$A_{\blacksquare} = A_{\blacksquare} + 4\, A_{\Delta}$$

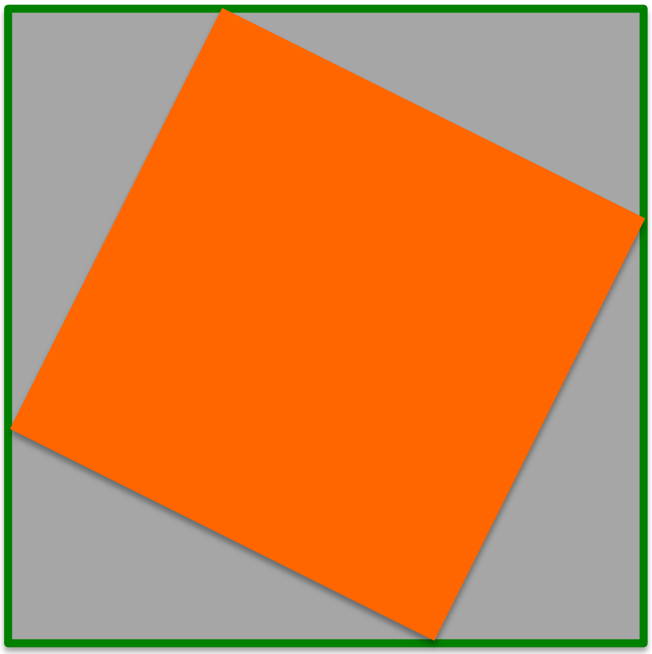
$$(a + b)^2 = c^2 + 4\,(a \cdot b : 2)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4\,(a \cdot b : 2)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sie sehen und Sie werden sich erinnern.
Was ist Ihre Erinnerung?

sich an den Beweis erinnern



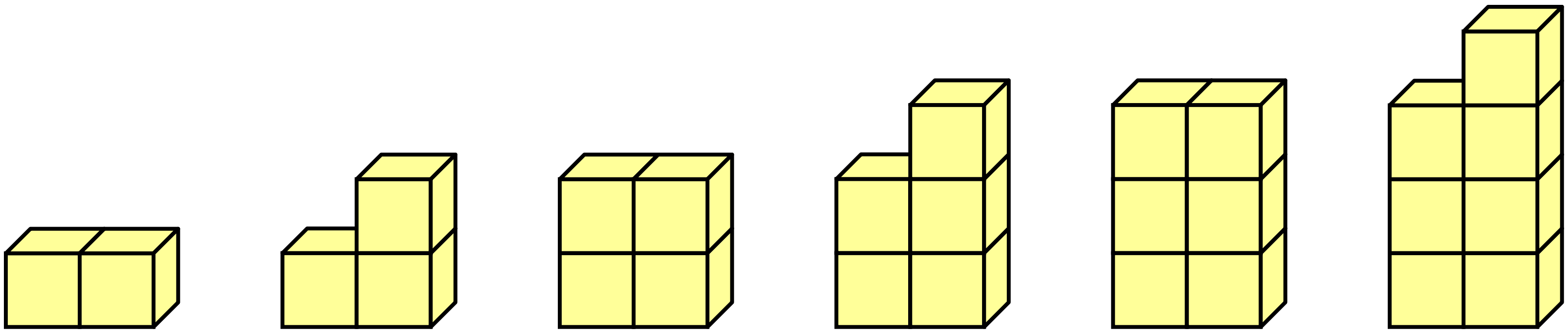
Das ist Ihre Erinnerung! – Kein a, b, …

2 Die Rolle der Anschauung beim Lernen

Was sind ***gerade*** Zahlen?

1 4 7 ?

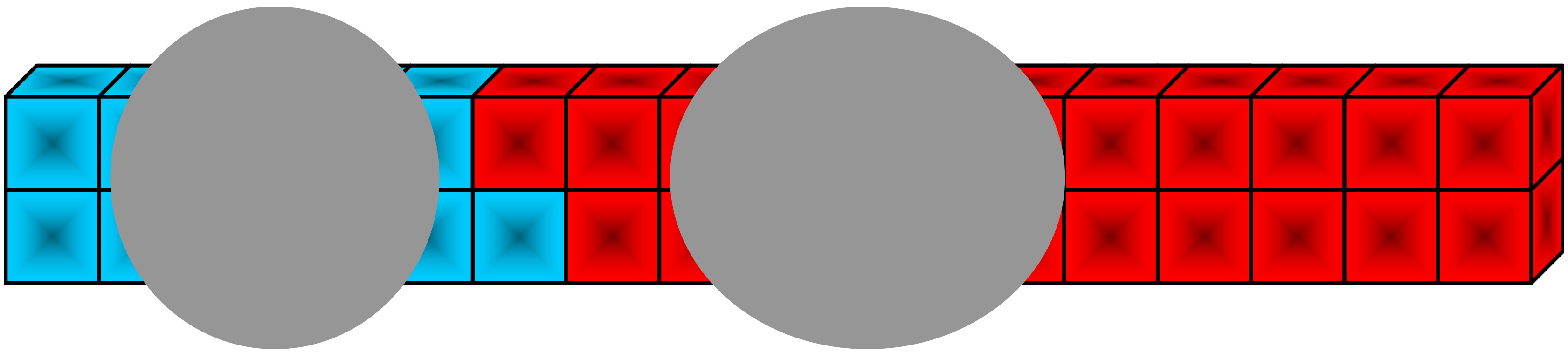
Anschauung – Einsichten



Es gibt gerade und ungerade Zahlen.
Welche Zahlen sind gerade?

aus: MATHEMATIKUS Klasse 1 (und später immer wieder - Spiralen!!!)

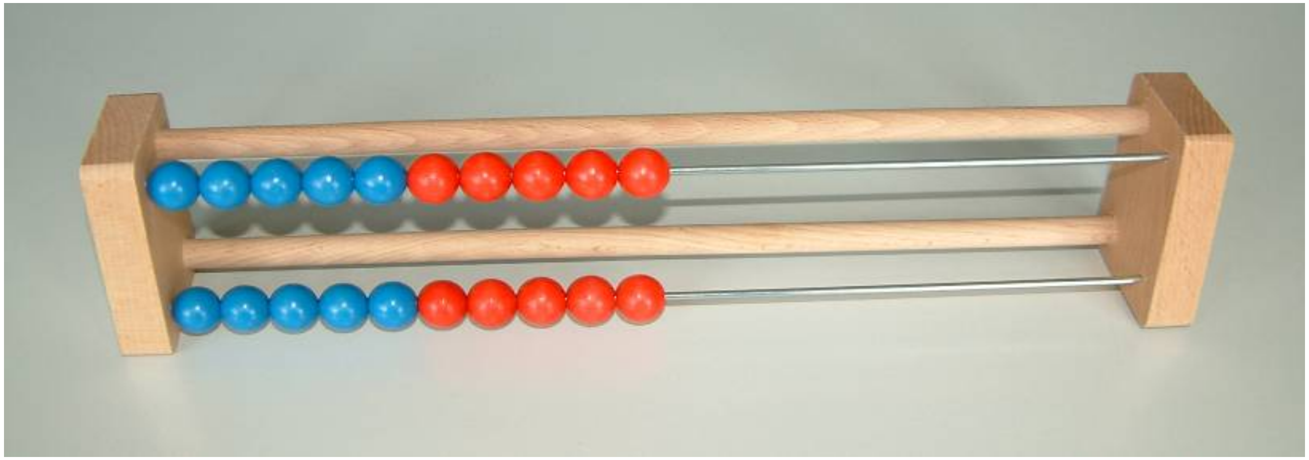
Anschauung – Einsichten



Die Summe zweier ungerader Zahlen ist *stets* gerade.

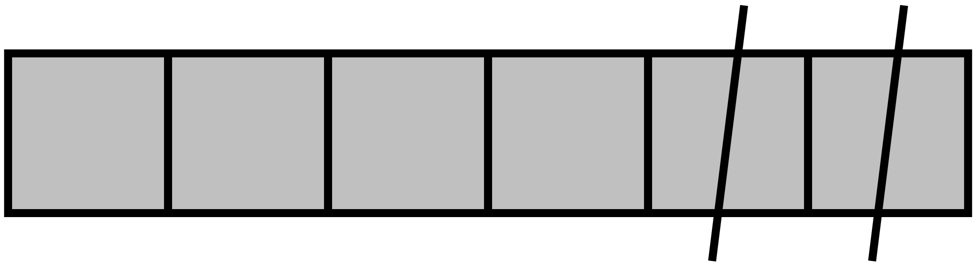
3 Veranschaulichungen – Hoffnung und Realität

- “Veranschaulichungsmittel” – der Name täuscht:
- Kinder *bekommen* nichts “veranschaulicht”,



- Kinder müssen den Sinn selbst erschließen,
- Lehrpersonen können dabei helfen.

3 Veranschaulichung



Was bedeutet das?

3 Veranschaulichungsmittel

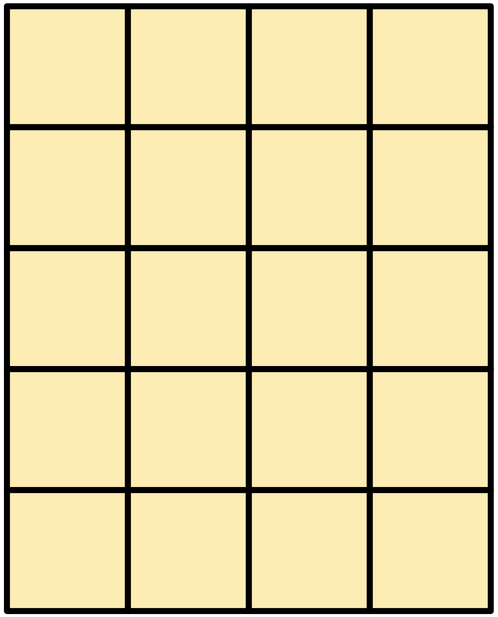
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Die Hundertertafel – stundenlang benutzt, steht oft permanent im Klassenzimmer …

3 Veranschaulichungsmittel

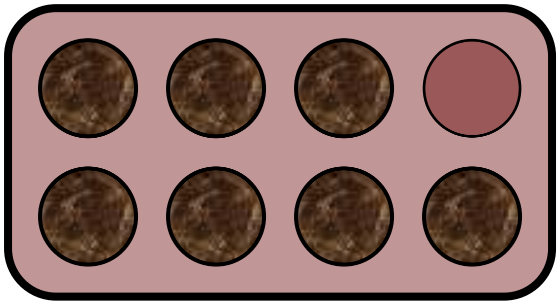
Male doch einmal unsere Hundertertafel.

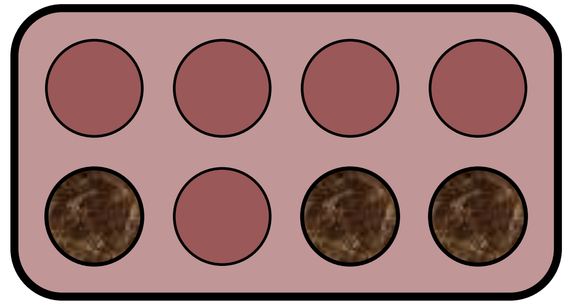
3 Veranschaulichung



Was ist hier dargestellt?

3 Veranschaulichung





Muffins sind leckere autonome Objekte!

Erst mit der Frage “wie viele …” wird es Mathe!

Objektiv Wesentliches muss Kindern subjektiv bedeutsam werden – das geht nicht ohne Anleitung!

3 Veranschaulichung

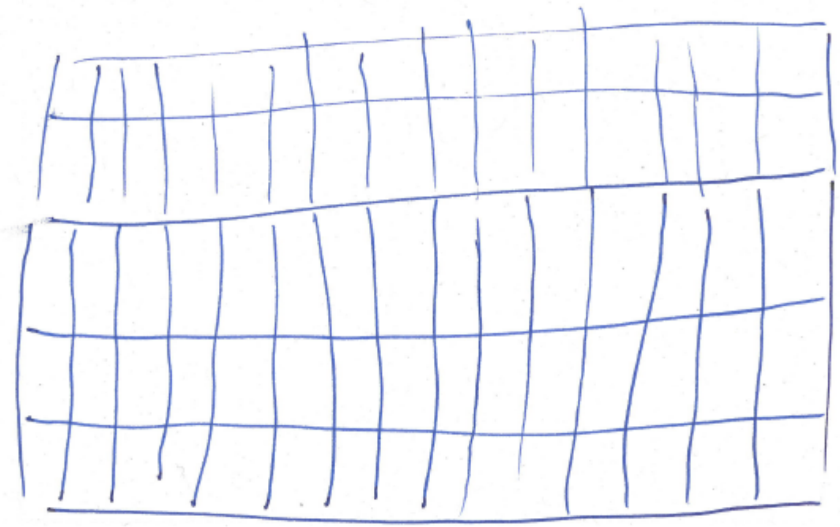
Wie viele Fliesen sind gelegt? (Wie erfasst das Kind das?)
Wie viele fehlen noch? (Hier ist es oft unmöglich, zu zählen!)

3 Anschauung: Befunde aus Klasse 2

- Male ein Bild passend zur Aufgabe 8 : 2

aus: Grassmann, Eichler, Mirwald, Nitsch (2019). *Mathematikunterricht*

3 Anschauung: Befunde aus Klasse 5



Male ein Bild passend zu 15 : 3

S. malt ein 15 x 3 Feld (unten).

I. fragt, wo das Ergebnis abgelesen werden kann

S. zeichnet noch zwei Reihen drüber

aus: Truppel 2017

3 Anschauung: Befunde aus Klasse 5

I.: „Hanna sagt, zu diesem Bild passt 20 : 4. Kannst du erklären wie sie das meint"

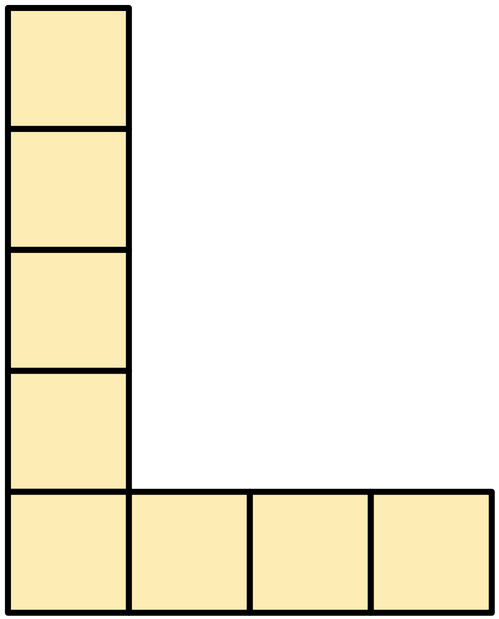
S.: Ergänzt …

Wie kommen Kinder auf derartigen Unfug?

aus: Truppel 2017

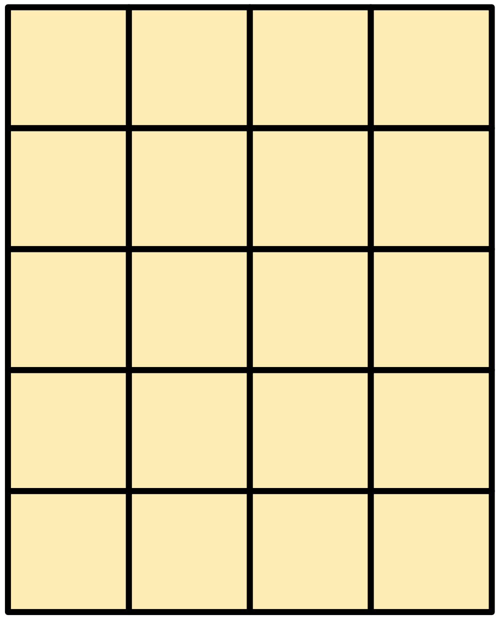
3 Veranschaulichung

Male ein Bild passend zu 5 • 4



Wie kommen Kinder darauf, so etwas zu malen?

3 Veranschaulichung



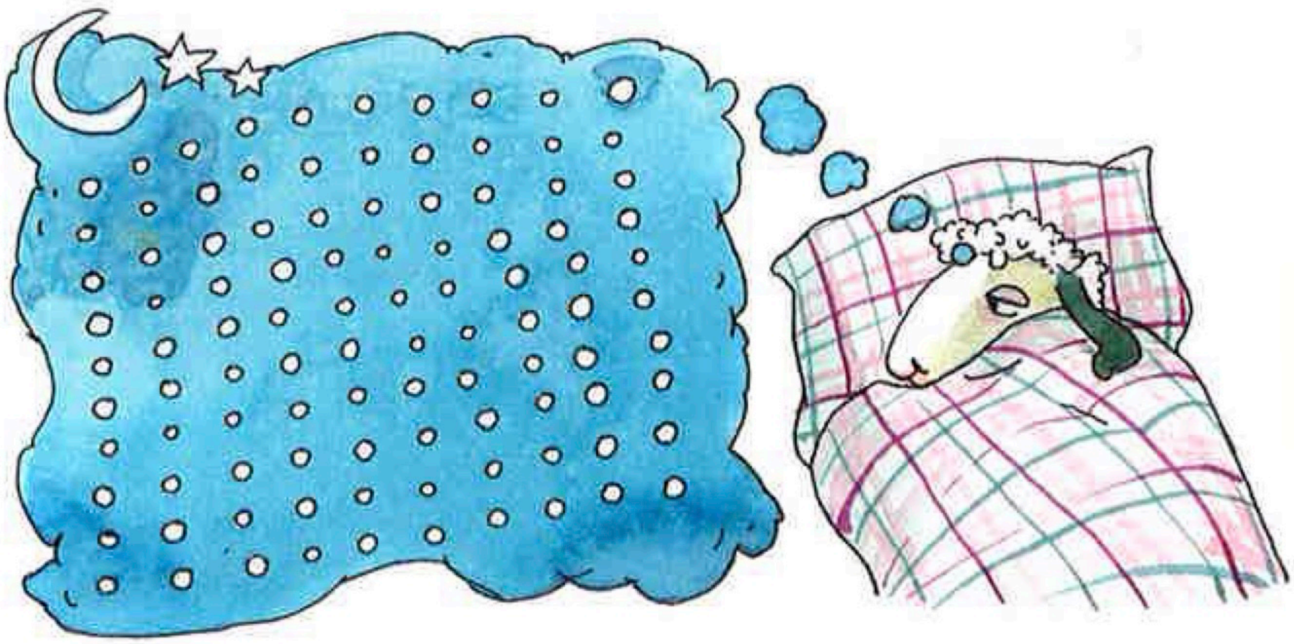
Die sprachliche Beschreibung des Bildes …

4 Wie wir rechnen und was Kinder lernen

4 Wie wir rechnen und was Kinder lernen

- Wie stellen Sie sich 48 vor? Wie 738?
- Woran denken Sie bei 4 • 48?
- Was denken Sie, wenn Sie 27 + 38 rechnen?
- Rechnen Sie bei 25 + 26 genauso?
- Wie rechnen Sie 81 - 35?
- Rechnen Sie 81 – 79 genau so?
- Wenn A = 1, B = 2, C = 3 ...
- ... dann ist A + A = B, B + A = C, K + A = L
- Was ist dann G + G, was D • D? Wie kann man die Ergebnisse ***verstehen*** und einprägen oder „berechnen"?
- D • D = P, es tut mir weh mein Zeh? ;-) Na, wer lehrt so?

aktive eigene Sinnkonstruktion?



10 · 10 = ____

nur das Schaf

schaut noch verwundert.

aus: Welt der Zahl, Klasse 2, Deutschland, 21.Jh.

aktive eigene Sinnkonstruktion?

27 + 38 ...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Rechnen SIE so, stellen SIE sich das so vor?

Warum werden Kinder stundenlang damit behelligt?

aktive eigene Sinnkonstruktion?

27 + 38 ...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Kinder rechnen hier nicht, sie ***zählen*** nach Regeln.
- Wenn sie die Tafel nicht mehr zur Hand haben, sind diese Kinder in der Regel ***hilflos verloren***.
- Das Material ist nicht weiter nutzbar ...

Klar, Sie denken bei **568** sofort: Tausenderbuch - Seite 6, dort Zeile 7 und da Platz 8! Oder eher nicht?

Ein Zwischenfazit

- Rechenschwache Kinder fallen nicht vom Himmel ...

- es gibt ein Problem der Passung ...

- viele Materialien erlauben keine Sinnkonstruktion

5 Perspektiven der Weiterentwicklung

- Rückbesinnung auf die Sachlogik
- Sparsamkeit der Veranschaulichungsmittel
- Nutzen tragfähiger Veranschaulichungsmittel
  - die lange Zeit genutzt werden können,
  - die den Aufbau tragfähiger Konzepte unterstützen,
  - die sich selbst überflüssig machen

Unterricht **wirklich** vom FACH aus

Sachlogik der Gegenstände

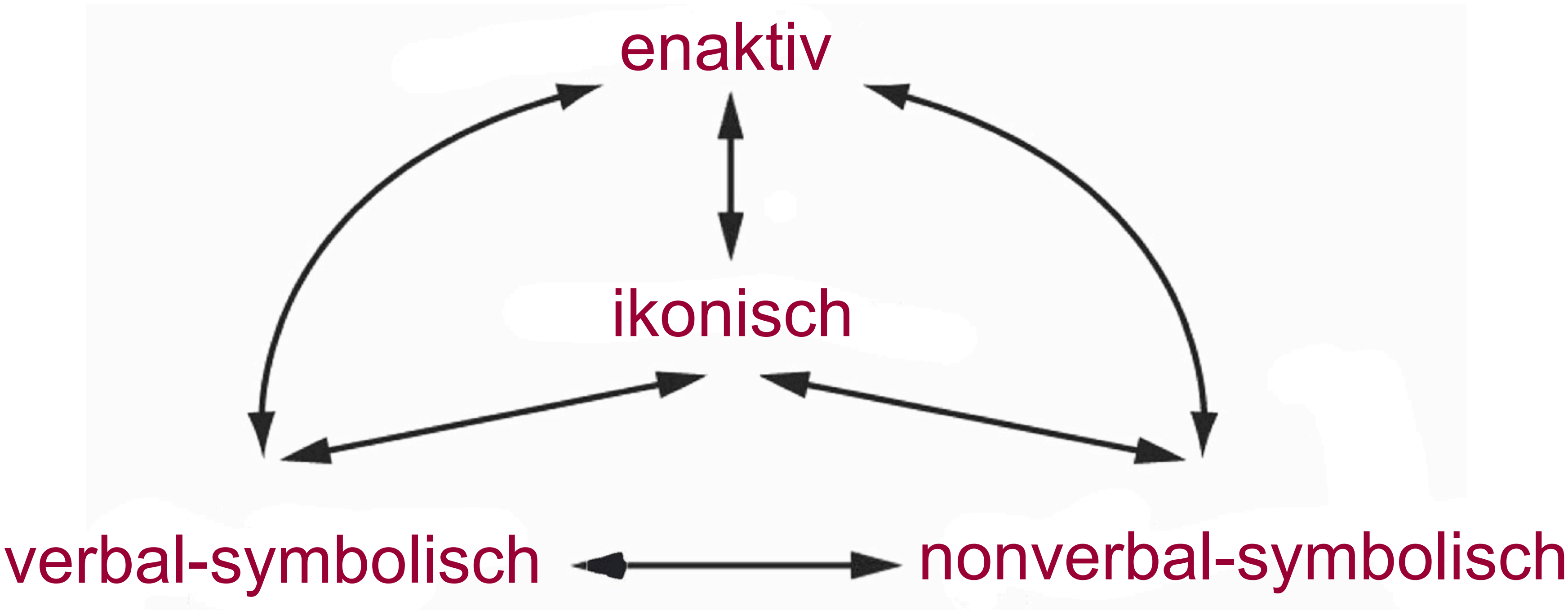
- Zahlen sind ***Begriffe***
- Terme ohne Variable sind ***Begriffe***
- Gleichungen sind ***Zusammenhänge***

Also

- sie existieren nur im Bewusstsein,
- Zeichenketten oder Wortfolgen sagen über deren Aneignung wenig (Reime lernen …)
- Festigen von Begriffen erfolgt durch genau 3 Aufgabentypen: Begriffsidentifizieren, Begriffsrealisieren und Systematisieren

Festigung von ***Begriffen*** – Aufgabentypen

Ebenen der Repräsentation (Bruner 1960)



Operationsverständnis entwickeln heißt Terme festigen: Identifizieren, realisieren und systematis.

Operationsverständnis: Festigung von Begriffen

enaktiv

ikonisch

verbal-symbolisch

nonverbal-symbolisch

Realisieren von 3 + 5, 3 • 6 etc.:

Zeichne ein Bild zu 3 + 5, baue mit Würfeln, erzähle eine Geschichte …

Operationsverständnis: Festigung von Begriffen

enaktiv

ikonisch

verbal-symbolisch → nonverbal-symbolisch

Identifizieren von 3 + 5, 3 • 4 etc.:

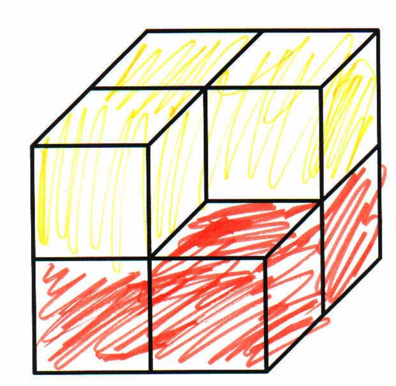
Schreibe zum Bild, zum Würfelgebäude oder zur Geschichte einen passenden Term.

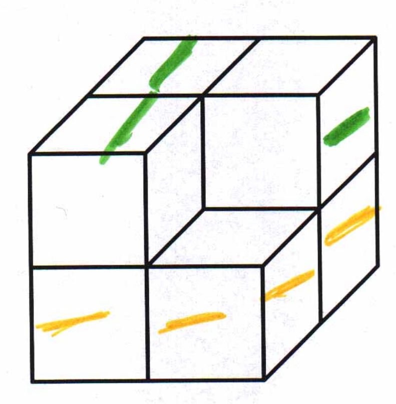
OV entwickeln – Terme festigen

Vorgabe: 2 D - Darstellung, ungefärbt

Paul kam vorhin und sagte, dass zum Bild die Aufgabe 4 + 3 passt.

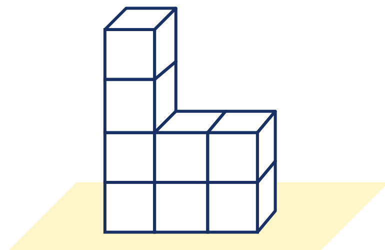
Kannst du einmal so ausmalen, dass man sieht wie er dass meint?



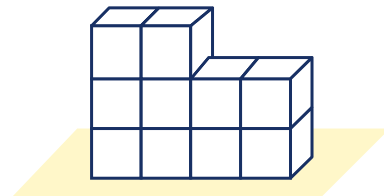


OV entwickeln – Terme festigen

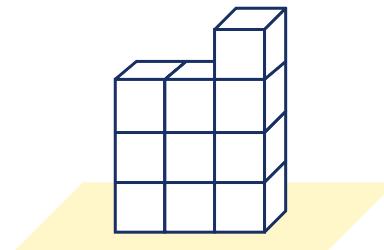
Färbe passend zur Aufgabe.



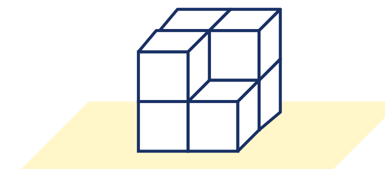
4 + 4



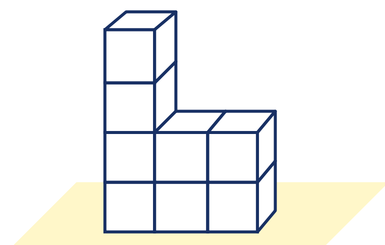
8 + 2



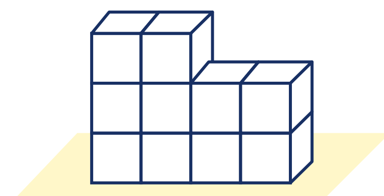
9 + 1



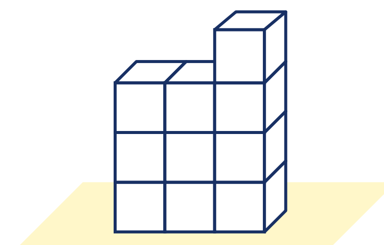
4 + 3



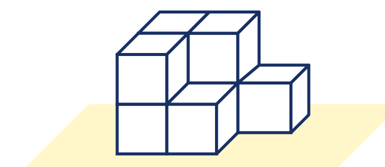
6 + 2



6 + 4



6 + 4



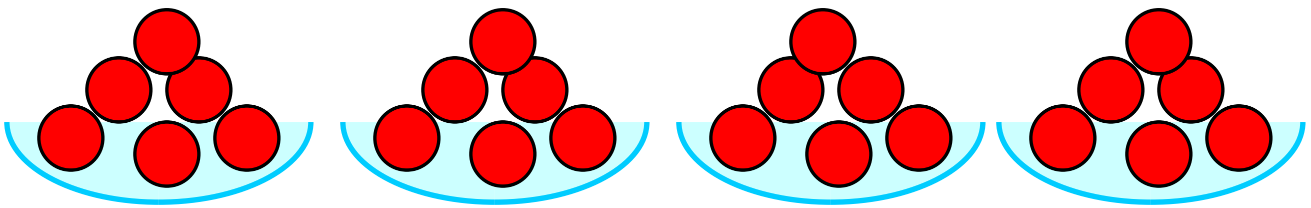
5 + 3

Terme - nicht sofort Gleichungen

Terme systematisieren

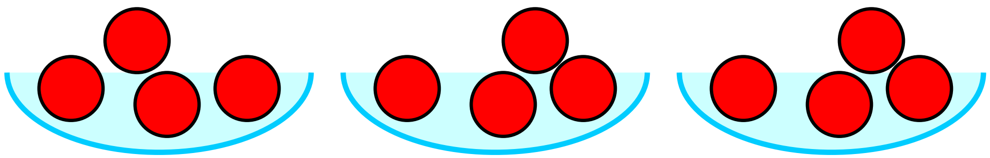
Semantische Netze aufbauen

Lege passend zu 4 • 5



Verändere dann, damit es zu 4 • 6 passt.
Beschreibe.

Die Grenzen des „Apfelschalenmodells“



Erkläre, warum das Bild zu diesen Aufgaben passt:

$3 \cdot 4$ $4 \cdot 3$

$12 : 4$ $12 : 3$

Stelle $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ dar.

Terme systematisieren

Erkläre, warum das Bild zu 5 • 4 passt.

Verändere das Bild so, dass es zu 6 • 4 passt. Erkläre.

Terme festigen – zum Beispiel 6 • 8

6 • 8 **ist ein Begriff,** also:

- **Begriffsidentifizierung**

  Welches Bild (Bauwerk, Geschichte) passt zu 6 • 8?

- **Begriffsrealisierung**

  Lege passend zu 6 • 8. Zeichne ein Bild zu 6 • 8.

  Erzähle eine Geschichte zu 6 • 8

- Einordnung in ein Begriffsystem (**Systematis.**)
  - Vergleiche 6 • 8 mit 5 • 8. Beschreibe.
  - Vergleiche 6 • 8 mit 3 • 8. Beschreibe.
  - Vergleiche 6 • 8 mit 8 • 6. Beschreibe.
  - Vergleiche 6 • 8 mit 60 • 8. Beschreibe.
  - dito …

Zahlen und Operationen - Sachkontexte
dynamisch

Diese Veranschaulichung ist tragfähig, denn:
Fortschreitende Abstraktion ist gewährleistet
Alle drei Aufgabentypen können veranschaulicht werden:

Ausgangszustand	Prozess	Endzustand
Gegeben	Gegeben	?
Gegeben	?	Gegeben
?	Gegeben	Gegeben

Rechnen (vgl. etwa Grassmann et al. 2019)

Rechnen

mündlich	schriftlich	mit Hilfsmitteln

B

Ke

Z

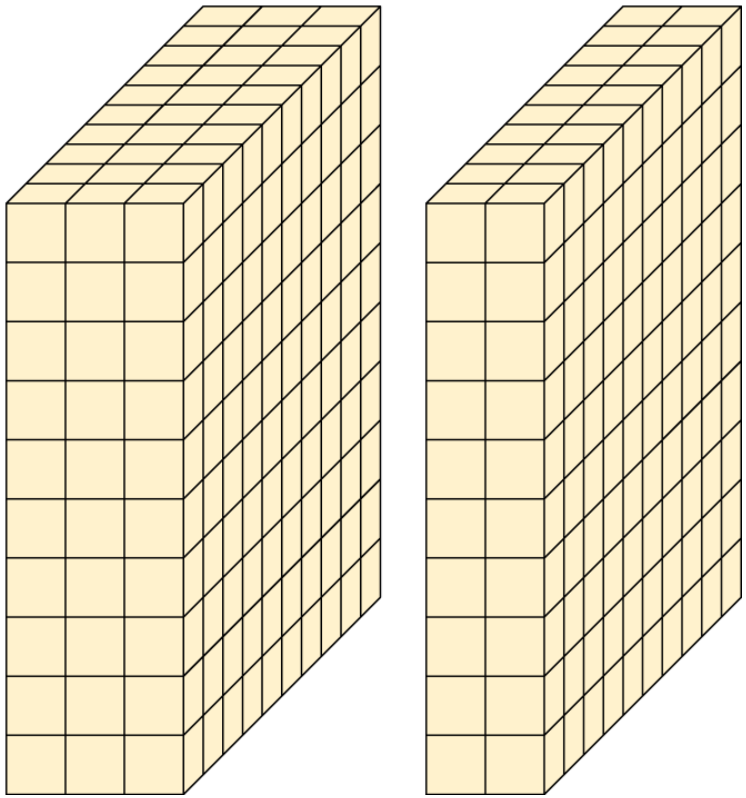
$\mathbf{S_N}$ (Rechenstrategien)

$\mathbf{S_Ü}$ 17 + 4, 70 + 40

R

Anmerkung: Wenn Didaktik vom FACH aus, wie z.B. von E. Ch. Wittmann gefordert, dann bitte auch hier und nicht ständig neue Bezeichnungen, nur weil junge Wissenschaftler_innen zu wenig gelesen und etwas nur subjektiv Neues entdeckt haben.

Rechnen – S$_{Ü}$



Erkläre, warum zum Bild (bzw. zur realen Anordnung) diese Aufgaben passen:

500 – 200

300 + 200

5 – 3

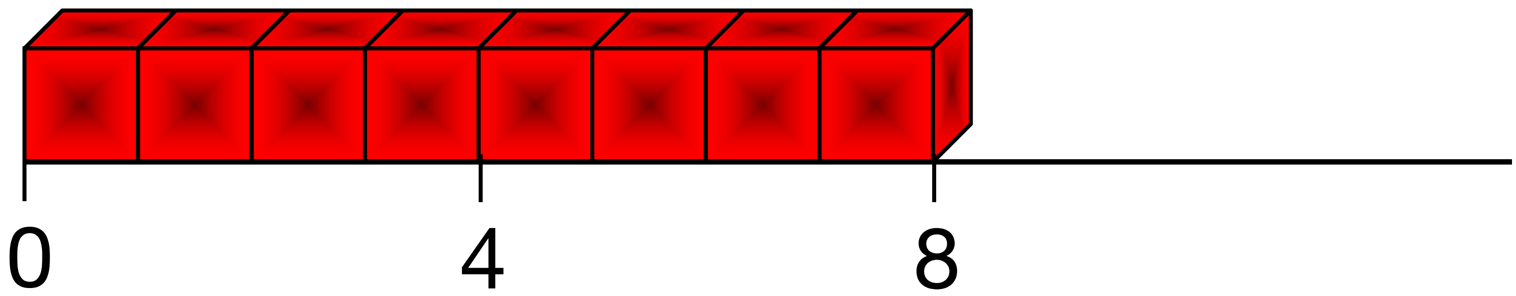
5 – 2

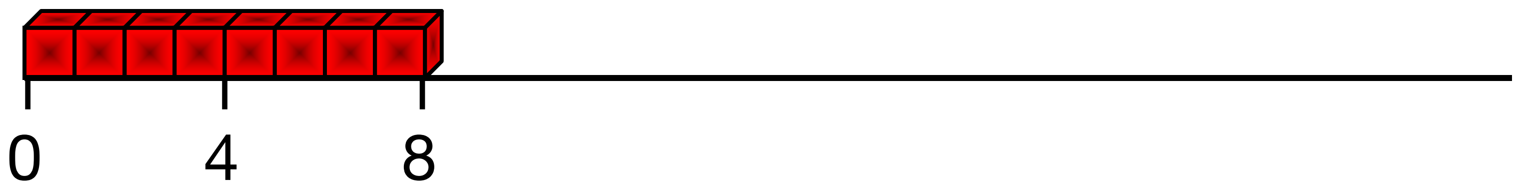
3 + 2

30 + 20

Hier werden bekannte Aufgaben auf größere Zahlenräume ***übertragen!***

Erarbeitung des Zahlenstrahls



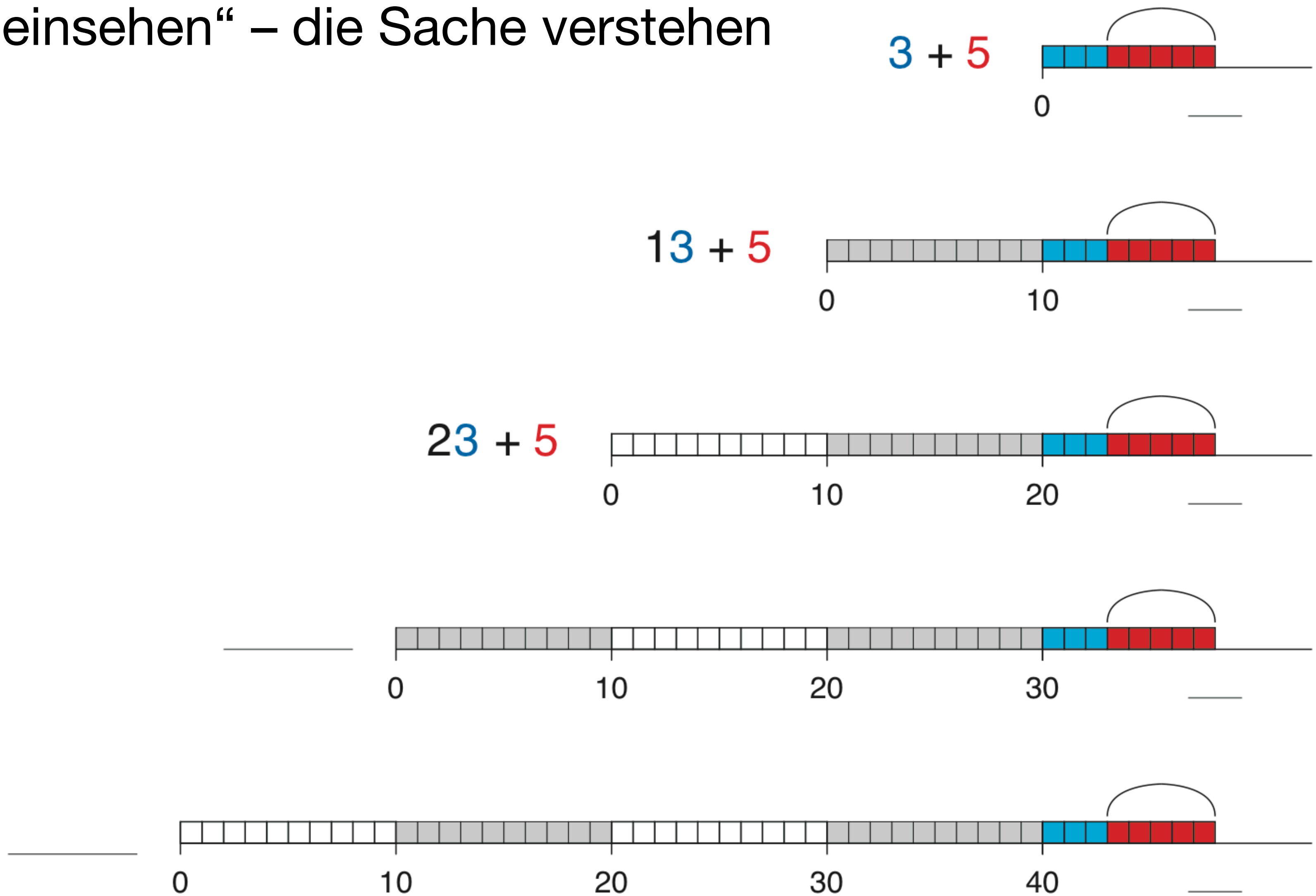


Gleichgültig, wie groß die Einheit ist:
4 ist immer die Mitte zwischen 0 und 8

aus: MATHEMATIKUS (Kl.1 - und später - Spiralen!!!)

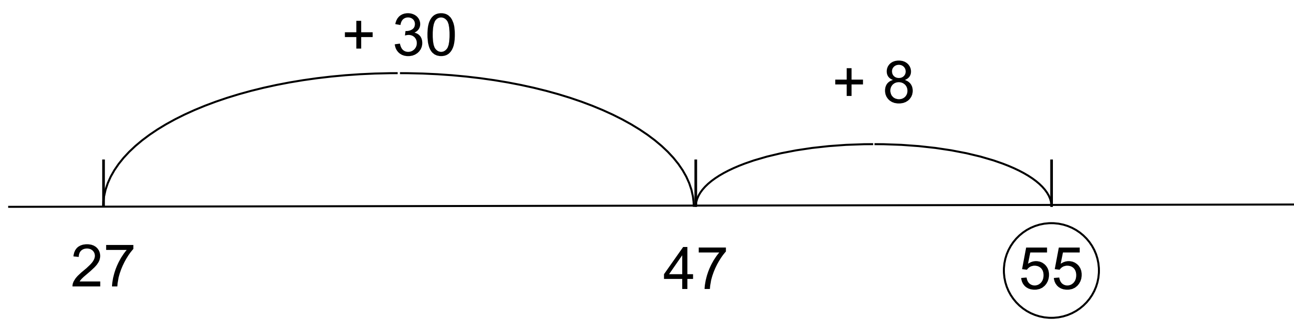
Rechnen: $S_{Ü}$ – Übertragen bekannter Aufg.

„einsehen“ – die Sache verstehen

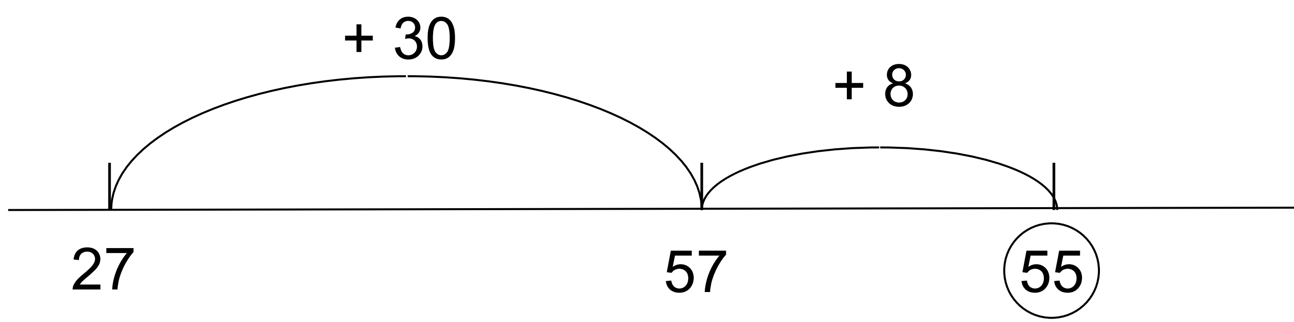


Leerer Zahlenstrahl („Rechenstrich“)

27 + 38



27 + 38



Gleiche Ergebnisse - verschiedene Fehlerursachen

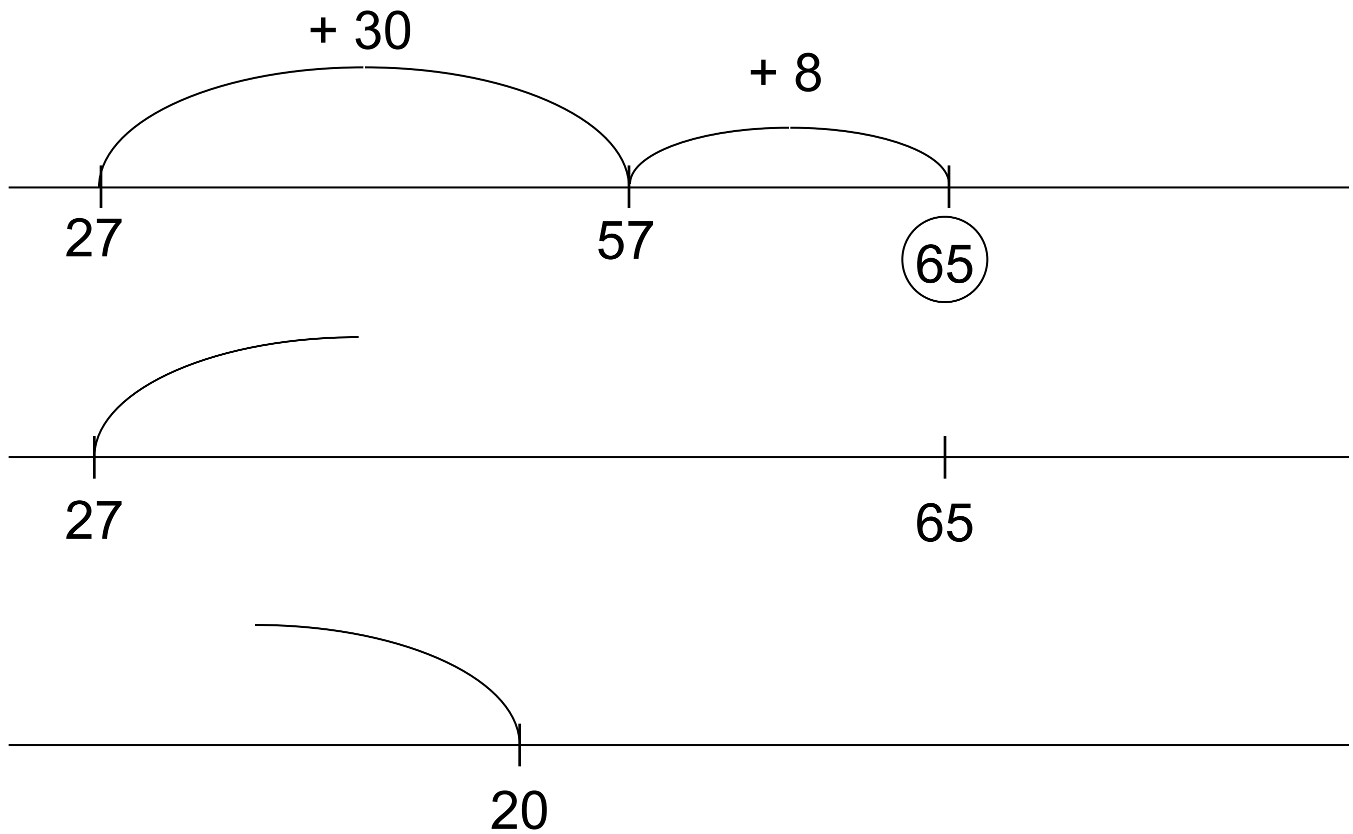
- am Rechenstrich wird die Ursache des Fehlers sichtbar!

Leerer Zahlenstrahl („Rechenstrich“)

27 + 38

27 + _ = 65

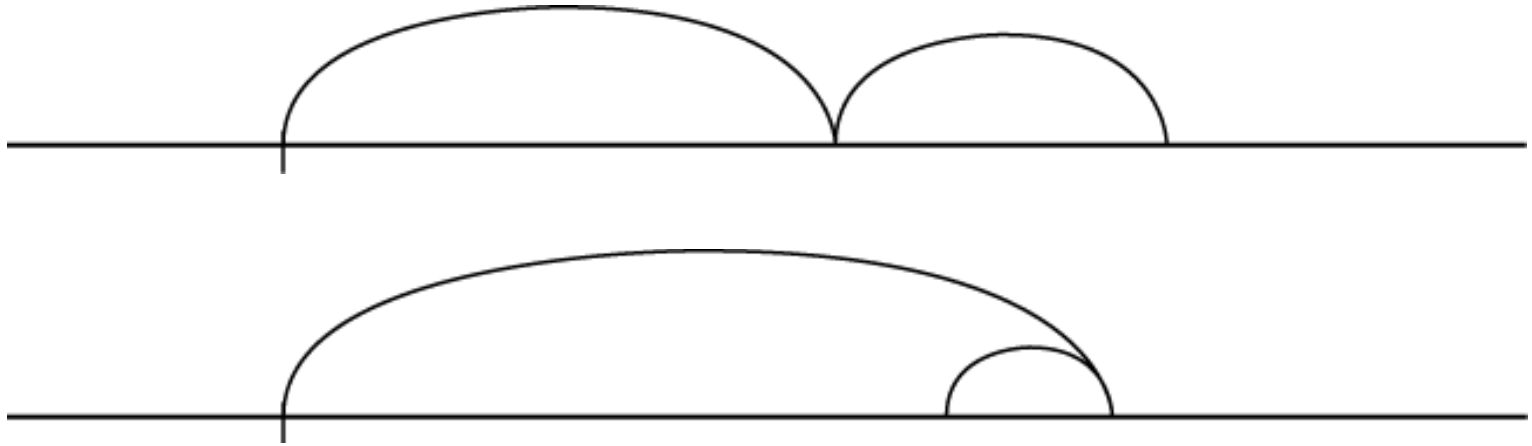
20 – _ = 50



Die Aufgabe 27 + _ = 65 kann schrittweise gelöst werden.

Die Unlösbarkeit von 20 – _ = 50 wird „eingesehen“.

Rechnen: S_N

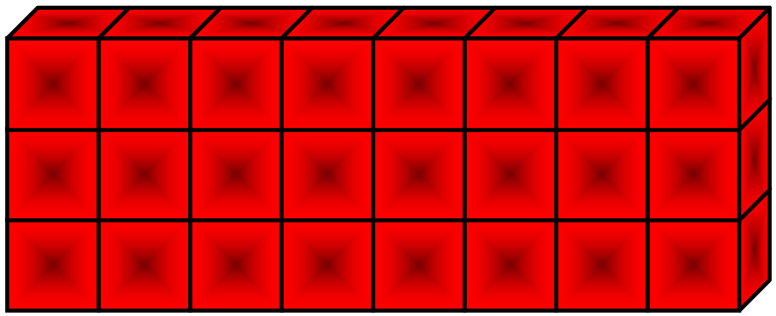


Rechenstrategien mit Kindern als das thematisieren, was sie sind:

Muster zum Lösen ganzer Klassen von Aufgaben.

Fazit: Perspektiven

Verbindung von Arithmetik und Geometrie



Lege mit Würfeln Vierecke aus.

Bei welchen Zahlen gibt es viele Möglichkeiten?

Bei welchen Zahlen kannst du Quadrate legen?

Bei welchen Zahlen werden es nur „Schlangen“?

aus: MATHEMATIKUS (Kl.1 - und später – spiralförmiges Arbeiten!!!)

Fazit: Perspektiven

Entwickeln der Fähigkeit der Kinder, Muster und Strukturen zu identifizieren und zu nutzen

- Das fördert das Vertrauen der Kinder in die eigene Fähigkeit zum Lösen neuer Aufgaben.
- Eine typische Arbeitsweise der Mathematik besteht darin, neue Aufgaben auf bereits gelöste Aufgaben zurückzuführen und so zu lösen.

Fazit: Perspektiven

Entwicklung der Fähigkeit zur Metakognition

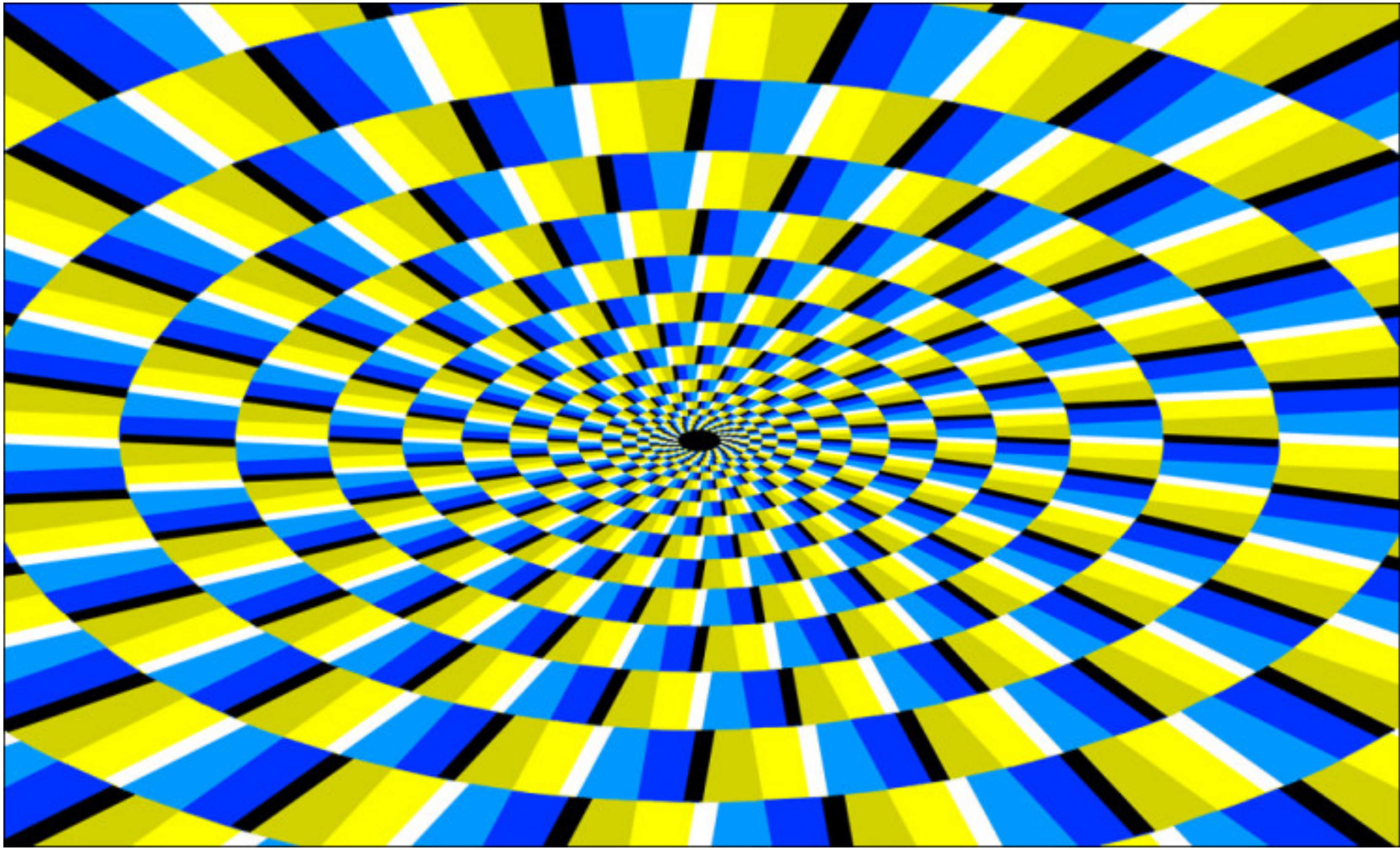
Wenn Kinder ihre Weg zur Lösung des Problems reflektieren und vergleichen, können sie generelle Problemlösestrategien erfassen.

- Tabellieren
- systematisch Probieren,
- Skizzieren, etwa passend zu einer Sachaufgabe

Dazu benötigen die Kinder Anleitung!

Wieso sollte ein Kind, was ein richtiges Ergebnis hat, über den Weg nachdenken? Es freut sich!

Wenn Sie hier Drehungen sehen, ist es Zeit für eine Kaffeepause



PH Schwäbisch Gmünd
University of Education

13./14. Mai 2022.

Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd.

30. FACHTAGUNG des FiL   Offline hier vor Ort

Willkommen schon heute im Namen des Rektorates
und aller Lehrenden unserer Studiengänge
B.A. und M.A. Integrative Lerntherapie

Literatur www.mathematikus.de

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for mathematics*. Washington DC: CCSSO & National Governors Association. www.corestandards.org/math

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel Boston / Berlin: Birkhäuser

Gleißberg, S. & Eichler, K.-P. (2020). Den Sinn der Multiplikation verstehen. *Grundschulunterricht Mathematik* Heft 4.

Gleißberg, S. & Eichler, K.-P. (2020). Offensiv mit dem Vergessen der Grundaufgaben umgehen. In: Grundschulunterricht Mathematik Heft 4.

Gleißberg, S. & Eichler, K.-P. (2019). Würfelbauten als Tool zur Diagnose und Förderung im Vorschulbereich und in den Klassen 1 und 2. In F. Heinrich (Hrsg.). *Aktivitäten von Grundschulkindern an und mit räumlichen Objekten*. Offenburg: Mildenberger. S. 47-59

Grassmann, M. et al. (2019). *Mathematikunterricht*. Baltmannsweiler: Schneider

Lorenz, J. H. (1991). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht - mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe

Lorenz, J. H. (Hrsg.) (2007/2008). *Mathematikus*. Lehrwerk für die Klassen 1 bis 4. Braunschweig: Westermann

NCTM (2000): Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM

Povey, H. (2017): Engaging (with) Mathematics and Learning to Teach. An Integrated Approach to Mathematics Preservice Education. Münster: WTM

Schulz, A. (1995): Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht der Grundschule. – Berlin: PAETEC

Treffers, A., & Buys , K. (2008). Calculation up to 100. In Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 61-88). Rotterdam /Tapei: Sense Publishers.

Truppel, D. (2017): Grundaufgabenkenntnisse der Multiplikation und Division sowie deren Anwendung in Klasse 5 - Analyse, Bilanz und Hauptrichtung der Weiterentwicklung. Zulassungsarbeit für das erste Staatsexamen für das Lehramt an Realschulen. Schwäbisch Gmünd: Pädagogische Hochschule

Van de Walle, J. A. (2015): Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally. Global Edition. New York: Longman